

Attenzione: Riconsegnate TRE fogli (protocollo a 4 facciate) su cui sono separatamente svolti i quesiti 1, 2 e 3, con Cognome e Nome e con il Numero (1, 2 e 3) messo in evidenza. Niente brutte copie. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

# 1

1.1 - (i) Si scrivano le equazioni differenziali dell'oscillatore e del repulsore armonico, e se ne tracci il ritratto in fase.

(ii) Si consideri l'equazione differenziale  $\ddot{x} = 1 - x^2$ , si determinino i due equilibri, e si scrivano le due equazioni del II ordine ottenute linearizzando l'equazione data in tali equilibri.

(iii) Tracciare il ritratto in fase dell'equazione al punto (ii) e spiegare il motivo per cui esistono similitudini tra tale ritratto —localmente attorno ai due punti di equilibrio— ed i ritratti in fase al punto (i).

1.2 - Si consideri il diffeomorfismo

$$\Psi : \mathbb{R}_{q,p}^2 \times \mathbb{R}_r^+ \rightarrow \mathbb{R}_{x,y,z}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z > 0\} \quad (q,p,r) \mapsto \left( \frac{2qr^2}{q^2+p^2+r^2}, \frac{2pr^2}{q^2+p^2+r^2}, r \frac{q^2+p^2-r^2}{q^2+p^2+r^2} \right).$$

di inversa

$$\Phi : \mathbb{R}_{x,y,z}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}_{q,p}^2 \times \mathbb{R}_r^+ \quad (x,y,z) \mapsto \left( \frac{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z}, \frac{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z}, \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right).$$

(i) Dato il campo vettoriale  $Y$  in  $\mathbb{R}_{q,p}^2 \times \mathbb{R}_r^+$  il cui sistema di equazioni differenziali è  $\dot{q} = 1, \dot{p} = 0, \dot{r} = 0$ , determinare l'espressione della seconda componente (associata alla variabile  $y$ ) del campo vettoriale  $X(x,y,z)$  coniugato ad  $Y$  da  $\Psi$ .

(ii) Mostrare che  $\Phi$  mappa le sfere concentriche di raggio  $r_0$  (polo nord escluso) nei piani di equazione  $r = r_0$ .

(iii) Facendo leva sul punto precedente indicare una famiglia di varietà invarianti per il campo vettoriale  $X$ .

# 2

2.1 - Nel riferimento non-inerziale  $Oxyz$  con l'asse  $z$  verticale ascendente e velocità angolare di trascinato  $\underline{\omega} = \omega \hat{z}$ , si consideri la superficie 2-dimensionale (cilindro parabolico) di equazione

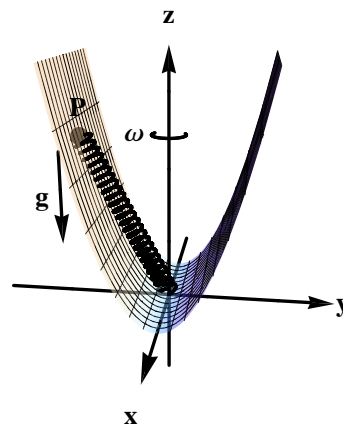
$$z = f(x,y) = \frac{a}{2}y^2, \quad a > 0.$$

Sulla superficie è vincolato in modo liscio un punto  $P$  di massa  $m$ . Oltre alla gravità, agisce sul punto una molla di costante  $h > 0$  e lunghezza a riposo nulla tesa tra l'origine  $O$  e il punto  $P$ .

(i) Che ruolo ha la forza di Coriolis?

(ii) Determinare tutti gli equilibri. Determinare delle condizioni sulle costanti strutturali del sistema ( $a, m, g, h, \omega$ ) che siano sufficienti a garantire la stabilità dell'origine; dire che teorema si sta usando.

(iii) Si pensi al problema linearizzato attorno a  $(0,0)$  nelle condizioni del punto precedente; ha senso calcolare le frequenze di piccola oscillazione nel modo standard (cioè  $\det(\dots) = 0$ )? Rispondere con un sì o un no motivato.



2.2 - Si consideri un sistema particellare di due punti materiali liberi di masse  $m_1, m_2$ , soggetto a mutue forze posizionali conservative la cui energia potenziale  $U(OP_1, OP_2)$  dipende unicamente dalla distanza tra i due punti:

$$U(OP_1, OP_2) = \phi(r), \quad r = |OP_1 - OP_2|, \quad \phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

(i) Quanti gradi di libertà ha questo sistema?

(ii) Mostrare in dettaglio che esiste un buon numero (3, oppure 6, oppure 7?) di integrali primi scalari per tale sistema dinamico meccanico e metterne con cura in evidenza l'eventuale natura Noetheriana.

# 3

3.1 - Dire per quale valore di  $a$  la trasformazione seguente è canonica di valenza unitaria ( $q \in \mathbb{R}^1$ )

$$Q = f(q,p) = \frac{a}{2}e^q, \quad P = g(q,p) = q + pe^{-q}$$

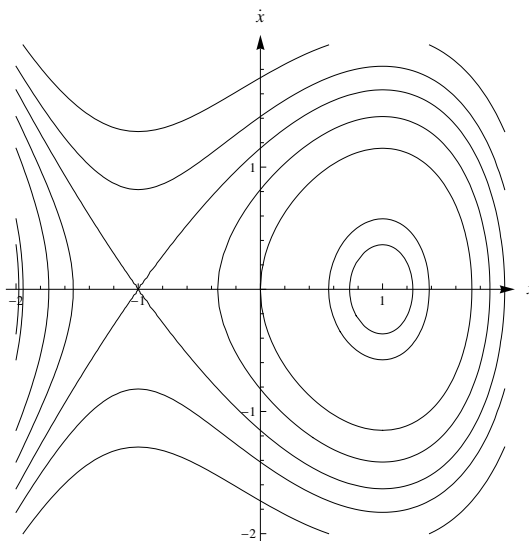
3.2 - Il principio variazionale di Hamilton mette in relazione le soluzioni delle equazioni di Lagrange tra estremi fissati con i punti critici (o stazionari) di un certo funzionale. Esiste un analogo principio variazionale per le equazioni di Hamilton? Enunciarlo e dimostrarlo.

SOLUZIONE ALL'ESERCIZIO 1.1

(i) L'oscillatore armonico ha equazione  $\ddot{x} = -\omega^2 x$ , ed ha per ritratto in fase la famiglia di ellissi concentriche di equazione  $\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = c$  con  $c$  costante. Il repulsore armonico ha equazione  $\ddot{x} = \omega^2 x$ , ed ha per ritratto in fase la famiglia di iperboli di equazione  $\dot{x}^2 - \omega^2 x^2 = c$  con  $c$  costante.

(ii) I due equilibri sono i punti  $(\pm 1, 0)$  nel piano  $x, \dot{x}$ . La linearizzazione del sistema ai due equilibri porge le due equazioni  $\ddot{\xi} = 2\xi$  in  $(-1, 0)$  e  $\ddot{\xi} = -2\xi$  in  $(1, 0)$ , dove  $\xi$  sono i piccoli scostamenti dalle due configurazioni di equilibrio.

(iii) Il ritratto in fase è disegnato a fianco. Attorno ai due equilibri il ritratto in fase è identico al ritratto in fase di un repulsore armonico (nel punto di equilibrio  $(-1, 0)$ ) e di un oscillatore armonico (nel punto di equilibrio  $(1, 0)$ ). Non c'è da stupirsi che un intorno dell'equilibrio instabile presenti un ritratto in fase simile a quello del repulsore armonico. Infatti il punto di equilibrio è iperbolico e vale il teorema di Grabman-Hartman. Il ritratto in fase dell'equilibrio stabile invece assomiglia a quello dell'oscillatore armonico, ma il motivo per cui questo avviene è più sottile, e passa attraverso l'esistenza di una legge di conservazione: l'integrale dell'energia



$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - (x - x^3/3).$$

SOLUZIONE ALL'ESERCIZIO 1.2

(i) Bisogna fare un conto. Il modo furbo di farlo è il seguente

$$\dot{y} = \left( \frac{2pr^2}{q^2 + p^2 + r^2} \right)' = -\frac{2pr^2}{(q^2 + p^2 + r^2)^2} 2q\dot{q} = -\frac{2pr^2}{q^2 + p^2 + r^2} \frac{2qr^2}{q^2 + p^2 + r^2} \frac{1}{r^2} = -yx \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(ii) È evidente che se ci si restringe all'insieme  $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$  l'immagine di  $\Phi$  è l'insieme

$$r_0^2 \left( \frac{x}{r_0^2 - z}, \frac{y}{r_0^2 - z}, 1 \right)$$

e le prime due componenti di questa mappa sono la celebrata proiezione stereografica. Quindi la mappa manda la sfera di raggio  $r_0$  (meno il polo nord) nel piano di quota  $r_0^2$ .

(iii) Visto che i piani  $z = c$  sono invarianti per  $Y$ , il campo vettoriale  $X$  avrà per varietà invarianti le sfere concentriche.

SOLUZIONE ALL'ESERCIZIO 2

2.1

(i) Il lavoro virtuale della forza di Coriolis non è nullo: in tutta generalità il prodotto misto  $F_C = -2m\omega \wedge V_P \cdot dP$  non è complanare; cionostante, la potenza lungo i moti è sempre nulla, è infatti una forza 'giroscopica' e si potrà applicare il TLD.

(ii) Energia potenziale delle altre forze in gioco:

$$U = mg\frac{a}{2}y^2 + \frac{1}{2}h(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4}y^4) - m\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

$$U = \frac{1}{2}[(h - m\omega^2)x^2 + (mga + h - m\omega^2)y^2 + (\frac{ha^2}{4})y^4]$$

$$\begin{cases} U_x &= (h - m\omega^2)x \\ U_y &= (mga + h - m\omega^2)y + \frac{1}{2}ha^2y^3 \end{cases}$$

$$\text{Equilibri } (x_E, y_E) : (0, 0), \quad \underbrace{\left( 0, \pm \sqrt{\frac{mga + h - m\omega^2}{\frac{1}{2}ha^2}} \right)}_{\text{questi due equ. esistono se } mga + h - m\omega^2 > 0}$$

$$\nabla^2 \mathcal{U}(x, y) = \begin{pmatrix} h - m\omega^2 & 0 \\ 0 & mga + h - m\omega^2 + \frac{3}{2}ha^2y^2 \end{pmatrix}$$

Pertanto  $(0, 0)$  è stabile per il TLD se

$$h - m\omega^2 > 0, \quad (\text{di conseguenza, è pur vero che anche } mga + h - m\omega^2 > 0)$$

(iii) Per la linearizzazione, la forza di Coriolis interviene e **non** si può applicare la nota formula del determinante che coinvolge matrice cinetica e Hessiano della energia potenziale.

**2.2** Sono esattamente gli esempi del teorema di Noether nella dispensa: momento lineare e momento angolare. In più c'è l'energia totale: sette integrali.

### SOLUZIONE ALL'ESERCIZIO 3

**3.1** Il calcolo di  $J\mathbb{E}J^T = \mathbb{E}$  porta a  $a = 2$ . Siccome siamo in  $\mathbb{R}^2$ , in questo speciale caso si può usare semplicemente  $\det J = 1$ .

**3.2** Principio variazionale di Hamilton-Helmholtz, si veda la dispensa.